本部分内容节选自中公版《行测速解技巧集萃》

特殊题型对应方法

一、十字交叉法

我们常说的十字交叉法是一种针对特殊题型的简捷算法，特别适合于两总量、两关系的混合物的计算，用来计算混合物中两种组成成分的比值，可以视作为加权平均问题。

例题 1：

含糖 70%的糖水 2000 克和含糖 60%的糖水 3000 克混合后的浓度是多少？

A.59%　　B.62%　　C.64%　　D.68%

解题分析：此题为浓度问题。采用十字交叉法，设混合后糖水的浓度为 x，则有：

$$\begin{array}{llcl} 2000 & 70\% & & x-60\% \\ & & x & \\ 3000 & 60\% & & 70\%-x \end{array}$$

所以，$\frac{x-60\%}{70\%-x}=\frac{2}{3}$，解得 x=64%，故选 C。

很多类型混合问题都可以采用十字交叉法解决，采用十字交叉法的时候要注意比例的对应以及减数与被减数的顺序。

例题 2：

某初中 2008 年共招收学生 1000 人，2009 年招收的学生总数比 2008 年增长了 1%，其中招收的男生比上年减少了 5%，招收的女生比上年增加了 10%，问今年招收了男生多少人？

A.480　　B.510　　C.540　　D.570

解题分析:总体分为两部分,知道部分的变化情况和总体的变化情况,采用十字交叉法。

去年 男生　-5%　　　　9%　　3

　　　　　　　　1%

去年 女生　10%　　　　6%　　2

由此可知去年男生与女生人数之比是 3:2,因此去年有男生 $1000\times\frac{3}{3+2}=600$ 人。今年有男生 $600\times(1-5\%)=570$ 人。

所以此题答案为 D。

二、比例法

比例法的应用十分广泛,考生要抓住题目中给出的比例关系。很多比例问题看似复杂,但只要理顺了题目中给出的比例关系,并以此列出相关的方程,便可以很快解出答案。

例题 1:

袋子里红球与白球数量之比是 19:13,放入若干个红球后,红球与白球数量之比变为 5:3,再放入若干只白球后,红球与白球的数量之比变为 13:11。已知放入的红球比白球少 80 个,那么原先袋子里共有(　　)个球。

A.880　　B.960　　C.1020　　D.1180

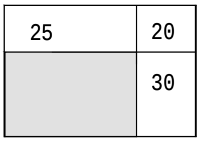
解题分析:放入红球后,白球的数量没有改变,19:13=57:39,5:3=65:39,假设原来有 $39a$ 个白球,$57a$ 个红球,则第一次放入了 $65a-57a=8a$ 个红球,又因为 13:11=65:55,第二次放入了 $55a-39a=16a$ 个白球。又已知放入的红球比白球少 80 个,即 $16a-8a=80$,可得 $a=10$,所以原来袋中共有 $(39+57)\times10=960$ 个球。

所以此题答案为 B。

例题 2:

一个长方形如图,被两条直线分成 4 个长方形,其中三个的面

积分别为 20 平方厘米、25 平方厘米和 30 平方厘米，另一个长方形(阴影部分)的面积是多少平方厘米?



A.37.5

B.35

C.40

D.42.5

解题分析:将四个长方形按长相等或者宽相等分组可以得到面积的比例关系，设阴影部分的面积是 x 平方厘米，则 25:x=20:30，所以 x=37.5。

所以此题答案为 A。

三、排列数与组合数的计算

解排列组合问题，首先要掌握排列组合问题的基本原理以及一些核心概念，在此基础上结合排列组合的解题技巧的运用，定能顺利解决此类题目。

加法原理:适用于分类讨论问题。

乘法原理:适用于分步讨论问题。

这两个原理是解决排列组合问题的基本原理，大多数排列组合问题都围绕这两个原理展开。近年来排列组合题型呈现多样化的趋势，考生在熟记这两个原理的同时，再掌握下面几种解题技巧，在解决排列组合问题时必能得心应手。

(一)优先法

对于某些元素有特殊限制的排列组合问题，我们采用优先法，即优先考虑有限制的元素。

例题:

小王的手机通讯录上有一手机号码，只记下前面 8 个数字为 15903428。但他肯定，后面 3 个数字全是偶数，最后一个数字是 6，且后 3 个数字中相邻数字不相同，请问该手机号码有多少种可能?

A.15　　B.16　　C.20　　D.18

解题分析:一位偶数有 0、2、4、6、8,共 5 个。因为最后一个数字是 6,相邻数字不相同且为偶数,那么首先考虑倒数第二位,则有 4 种选择。倒数第三位与倒数第二位不相同,也有 4 种选择,共有 4×4=16 种情况。答案选 B。

(二)分类法

在元素比较多,限制条件也比较多的情况下,我们可以进行分类讨论,分成几种不相容的情况,分别计算,最后总计。但是采用此方法是,必须细致,做到不遗漏不重复。

例题:

某单位订阅了 30 份学习材料发放给 3 个部门,每个部门至少发放 9 份材料。问一共有多少种不同的发放方法?

A.7　　B.9　　C.10　　D.12

解题分析:先给每个部门发放 9 份材料,再考虑将剩下的 3 份材料发给这三个部门。有三种方法:第一种方法是 3 份材料发给一个部门,有 3 种情况;第二种方法是 3 份材料发给两个部门,有 6 种情况;第三种方法是 3 份材料发给三个部门,有 1 种情况。共 10 种情况。

(三)间接法

当从正面考虑问题比较复杂时,可以考虑用间接法解题,以期达到“殊途同归”之效。

例题:

从 15 名学生中选 5 名参加比赛,其中甲和乙至少有一人要被选上,请问有多少种选法?

A.3003　　B.1716

C.1287　　D.154440

解题分析:题中正面考虑的情况比较多,因此我们可以考虑采

用间接法,“甲和乙至少有一人要被选上”的反面就是“甲和乙都没有选上”。从 15 名学生中选 5 名参加比赛,有 $C_{15}^{5}=3003$ 种选法,甲和乙都没选上,有 $C_{13}^{5}=1287$ 种选法,因此两个人至少有一人选上,有 3003−1287=1716 种选法。

所以此题答案为 B。

(四)捆绑法和插空法

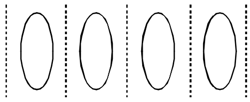
在解决相邻问题时,我们通常采用捆绑法,把相邻的元素并为一组(看做一个元素)参与排列;在解决不相邻问题时,我们则采用插空法,先把无限制的元素全排列,再把有限制的元素插入到无限制元素两端及中间的空中。

例题 1:

将三盆同样的红花和四盆同样的黄花摆放成一排,要求三盆红花互不相邻,共有多少种不同的方法?

A.8　　B.10　　C.15　　D.20

解题分析:此题是不相邻问题,故采用插空法,四盆黄花两侧可形成 5 个空隙,要使三盆红花互不相邻只需从中选取 3 个空隙放入红花即可,$C_{5}^{3}=10$。



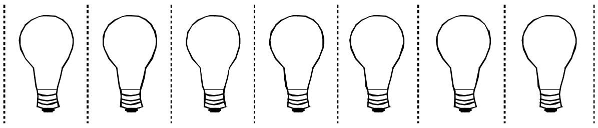
此外,还有一种插板法,与插空法形似,当遇到相同元素的分配问题时,可以采用插板法。

例题 2:

某城新修建的一条道路上有 12 盏路灯,为了节省用电而又不影响正常的照明,可以熄灭其中三盏灯,但两端的灯不能熄灭,也不能熄灭相邻的两盏灯,那么熄灯的方法共有多少种?

A.C_{8}^{3}　　B.A_{8}^{3}　　C.C_{9}^{3}　　D.C_{11}^{3}

解题分析：共有 12 盏灯，两端的两盏不能熄灭，考虑中间 10 盏灯，熄灭 3 盏后还剩 7 盏。



结合上图，问题转化为在这 7 盏灯的两端及中间的 8 个空中选择 3 个空放上要熄灭的灯，不同的方法共有C_8^3种。

所以此题答案为 A。

四、综合分析

数学运算中，有一些题目是需要我们进行综合分析考虑，才能确定正确答案的，例如统筹问题、最值问题等等，下面我们就介绍一下解这类题目的技巧。

例题 1：

某城市居民用水价格为：每户每月不超过 5 吨的部分按 4 元/吨收取；超过 5 吨不超过10 吨的部分按 6 元/吨收取；超过 10 吨的部分按 8 元/吨收取。某户居民两个月共交水费 108 元，则该户居民这两个月用水总量最多为多少吨？

A.17.25　　B.21　　C.21.33　　D.24

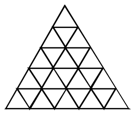
解题分析：总水费一定时，要使用水总量最多，则每个月所用价位低的水尽量多。尽量使用 4 元/吨和 6 元/吨的水，则每月用满 10 吨水需交水费 5×4+5×6=50 元，两月共需 100 元，剩下的 8 元一定是按照 8 元/吨收费的，即用水量为 1 吨，则总用水量为 2×10+1=21 吨。

答案选 B。

例题 2：

如图某三角形展览馆由 25 个正三角形展室组成，每两个相邻展室(指有公共边的小三角形)都有门相通，若某参观者不愿返

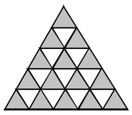
回已参观过的展室(通过每个房间至少一次),那么他至多能参观多少个展室?



A.23　　B.22

C.21　　D.20

解题分析:如图对展室作黑白相间染色,得 10 个白室,15 个黑室,按要求不返回参观过的展室,因此,参观时必定是从黑室到白室或从白室到黑室(不会出现从黑到黑,或从白到白),由于白室只有 10 个,为使参观的展室最多,只能从黑室开始,顺次经过所有的白室,最终到达黑室,所以至多能参观到 21 个展室。



所以此题答案为 C。

例题 3:

六个盘子中各放有一块糖,每次从任选的两个盘子中各取一块放入另一个盘子中,这样至少要做多少次,才能把所有的糖都集中到一个盘子中?

A.3　　B.4　　C.5　　D.6

解题分析:此类操作性问题,要求最优的情况,需要进行细致的分析。按照题中的要求,每次从任选的两个盘子中各取一块放入另一个盘子中,开始时六个盘子是 1、1、1、1、1、1,则第一次操作后一定是 0、0、3、1、1、1。最后是 0、0、0、0、0、6,则倒数第二次一定是 0、0、0、1、1、4。现在需要考虑的就是 0、0、3、1、1、1 如何变成 0、0、0、1、1、4,分析可知,从有三颗糖的盘子中取一粒,从有一颗糖的盘子中取一粒放在没有糖的盘子中,即变为 2、0、2、0、1、1,然后从有两颗糖的盘子里取一粒,从有一颗糖的盘子里取一粒放在另一个有两颗糖的盘子里,变为了 4、0、1、0、0、1,即达到了目的,共是 4 次操作。

所以此题答案为 B。

例题 4:

某商场将进货价为 30 元的台灯以 40 元售出，平均每月能售出600 个。调查表明:这种台灯的售价每上涨 1 元,其销售量就将减少 10 个。为了实现平均每月销售利润最大化,这种台灯应定价为多少?

A.50　　B.58　　C.65　　D.72

解题分析:设台灯上涨了 x 元,销售利润为 y,可以得到方程 $(40+x)(600-10x)-30(600-10x)=y$,即 $y=-10x^2+500x+6000$,当 $x==\frac{500}{2\times10}=25$ 时,y有最大值,即定价为 40+25=65 元,故选 C。

最值问题的形式多样,许多题目可以利用均值不等式、二次函数以及简单微分解决，上述例题就是运用了二次函数的性质求得最大值。

二次函数特性:函数图像的顶点$(-\frac{b}{2a},\frac{4ac-b^2}{4a})$,通常要求的最值就在顶点处。

例题 5:

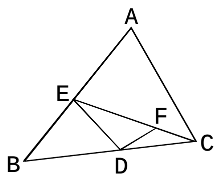
已知△ABC 的面积是 54,D、E、F 分别是 BC、AB、EC 上的点,如果$\frac{CF}{CE}=a$,$\frac{CD}{CB}=b$,$\frac{BE}{BA}=c$,且 $0<a$、b、$c<1$,$a+b+c=1$,则△DCF 面积的最大值是(　　)。

A.2

B.3

C.9

D.18



解题分析:此题解题思路是清晰的,此题给出了三个线段长度的比例关系,结合此题最后问题是关于三角形的面积,于是想到将线段之间的比例关系转化为三角形之间的面积关系。由同高的三角形的面积之比等于此高对应的底之比可知:

$\frac{S_{\triangle CBE}}{S_{\triangle CBA}}=\frac{BE}{BA}=c$，$\frac{S_{\triangle CDE}}{S_{\triangle CBE}}=\frac{CD}{CB}=b$，$\frac{S_{\triangle DCF}}{S_{\triangle DCE}}=\frac{CF}{CE}=a$。

由上面的三个式子可知 $S_{\triangle DCF}=aS_{\triangle DCE}=abS_{\triangle CBE}=abcS_{\triangle CBA}$。

题中要求△*DCF* 面积的最大值，由上面可知即求 abc 的最大值,此处考察的是均值不等式,其内容如下：

若 $x_1,x_2,\cdots\cdots,x_n>0$，则 $\frac{x_1+x_2+\cdots\cdots+x_n}{n}\geqslant\sqrt[n]{x_1\cdot x_2\cdot\cdots\cdots\cdot x_n}$。意思是 n 个正数的算术平均数不小于这 n 个数的几何平均数，当且仅当这 n 个数相等时,它们的几何平均数等于它们的算术平均数。

题中三个整数和为 1,当且仅当三个数相等时,它们的乘积最大,即 $a=b=c=\frac{1}{3}$，$abc=\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{27}$。

所以△*DCF* 面积的最大值是 $\frac{1}{27}\times54=2$。

所以此题答案为 A。

例题 6：

把一个 64×40×24 的长方体切成若干个完全相同的小正方体，并使这些小正方体的表面积之和最小，则小正方体的表面积的和是(　)。

A.73280　　　　B.54680

C.69450　　　　D.46080

解题分析：此题关键在于确定什么情况下这些小正方体的表面积之和最小。体积之和一定,这些小正方体的体积相等,为使表面积的和最小,则应使每一个小正方体的体积尽量大,也就是分割的小正方体的数目尽量少。进一步分析可知,这些小正方体的边长应是大长方体棱长的最大公约数,24、40、64 的最大公约数是 8。大长方体可分成(64×40×24)÷(8×8×8)=120 个棱长为 8 的小正方体。表面积之和是 8×8×6×120=46080。

所以此题答案为 D。